

Corriente Alterna

Resolución de circuitos con corriente alterna en estado senoidal permanente.

Se definen las funciones complejas:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} = \sqrt{2} V_{ef} e^{j\omega t} = V_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$i(t) = I_0 e^{j\omega t + \varphi} = \sqrt{2} I_{ef} e^{j\omega t + \varphi} = I_0 [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)]$$

donde j es la unidad imaginaria, ω la frecuencia angular y t el tiempo.

$$\text{Así, } v(t) = V_0 \cos \omega t = \text{Re}[v(t)] \quad \text{e} \quad i(t) = I_0 \cos (\omega t + \varphi) = \text{Re}[i(t)]$$

$$\text{Si } v(t) \text{ fuera } v(t) = V_0 \sin \omega t \Rightarrow v(t) = \text{Im}[v(t)] \quad \text{e} \quad i(t) = I_0 \sin (\omega t + \varphi) = \text{Im}[i(t)]$$

Obs.: Si v fuera $v(t) = V_0 \cos (\omega t + \phi)$, se debe definir:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t + \phi} = \sqrt{2} V_{ef} e^{j\omega t + \phi} = V_0 [\cos (\omega t + \phi) + j \sin (\omega t + \phi)]$$

$$i(t) = I_0 e^{j\omega t + \varphi + \phi} = \sqrt{2} I_{ef} e^{j\omega t + \varphi + \phi} = I_0 [\cos (\omega t + \varphi + \phi) + j \sin (\omega t + \varphi + \phi)]$$

La **ley de Ohm generalizada** establece: $v = i \cdot Z$ $[v(t) = i(t) \cdot Z]$

Z es la **impedancia**, y aunque v e i son funciones de t , como ambas tienen la misma frecuencia angular y cambian de igual forma, Z es constante en el tiempo.

φ es el **ángulo de desfase**. Es el ángulo de la corriente medido con respecto al voltaje. Se cumple que $\varphi_z = \text{Arg } Z = -\varphi$.

Impedancias de los elementos de circuito:

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j \omega L$$

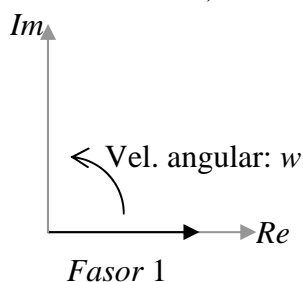
$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

Cuando hay elementos en *serie*: $Z_{\text{serie}} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$

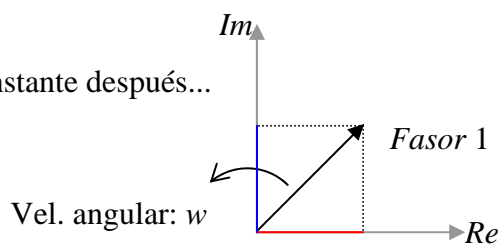
Para elementos en *paralelo*: $Z_{||} = [1/Z_1 + 1/Z_2 + \dots + 1/Z_n]^{-1}$

Fasores

Un *fasor* es una función compleja del tiempo que cambia su argumento a velocidad constante (se evidencia porque su vector representativo en el plano complejo rota a velocidad constante).



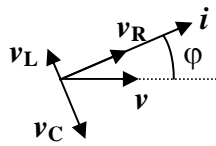
Un instante después...



Si $v(t) = \text{Re}[v(t)]$, entonces es significativa la proyección del fasor sobre el eje real (rojo). Si $v(t) = \text{Im}[v(t)]$, entonces es significativa la proyección del fasor sobre el eje imaginario (azul)

Diagrama fasorial

Ej. de diagrama fasorial circuito RLC-serie:



v se toma como referencia (0°) (con $t = 0$).

v_R en fase con la i (ambos tienen igual argumento)

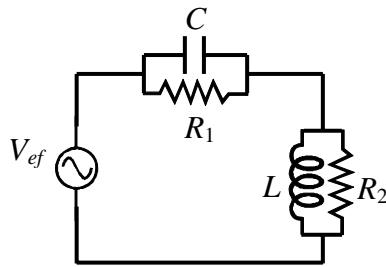
v_L adelanta 90° a i

v_C retrasa 90° con respecto a i

$v_C + v_L + v_R = v$

Obs.: Por lo general se utiliza una escala para las corrientes y otra para las tensiones.

Ejemplo:



Obtener v e i en cada componente.

$$v(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cos \omega t$$

$$\mathbf{Z}_1 = [1/R_1 + j\omega C]^{-1}$$

$$\mathbf{Z}_2 = [1/R_2 + 1/(j\omega L)]^{-1}$$

$$|\mathbf{Z}_1| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + (\omega C)^2}}$$

$$\varphi_{z1} = \arctg(-\omega C R_1)$$

$$|\mathbf{Z}_2| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

$$\varphi_{z2} = \arctg\left(\frac{R_2}{\omega L}\right)$$

$$\mathbf{Z}_{\text{Tot}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \frac{\frac{1}{R_1} - j\omega C}{\frac{1}{R_1^2} + \omega^2 C^2} + \frac{\frac{1}{R_2} + \frac{j}{\omega L}}{\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} = \frac{R_1 - j R_1^2 \omega C}{1 + R_1^2 \omega^2 C^2} + \frac{R_2 \omega^2 L^2 + j R_2^2 \omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\mathbf{Z}_{\text{Tot}} = \frac{(R_2^2 + \omega^2 L^2)(R_1 - j R_1^2 \omega C) + (1 + R_1^2 \omega^2 C^2)(R_2 \omega^2 L^2 + j R_2^2 \omega L)}{(1 + R_1^2 \omega^2 C^2)(R_2^2 + \omega^2 L^2)}$$

$$+ j \frac{-R_1^2 R_2^2 \omega C - R_1^2 \omega^3 L^2 C + R_2^2 \omega L + R_1^2 R_2^2 \omega^3 C^2 L}{(1 + R_1^2 \omega^2 C^2)(R_2^2 + \omega^2 L^2)}$$

$$|\mathbf{Z}| = \frac{\left\{ \left[(R_2^2 + w^2 L^2)(R_1 - j R_1^2 w C) + (1 + R_1^2 w^2 C^2)(R_2 w^2 L^2 + j R_2^2 w L) \right]^2 + \dots \right.}{(1 + R_1^2 w^2 C^2)(R_2^2 + w^2 L^2)} \\ \left. \dots + \left[-R_1^2 R_2^2 w C - R_1^2 w^3 L^2 C + R_2^2 w L + R_1^2 R_2^2 w^3 C^2 L \right]^2 \right\}}{(1 + R_1^2 w^2 C^2)(R_2^2 + w^2 L^2)}$$

$$\varphi_z = \text{Arg } \mathbf{Z} = \arctg \left[\frac{-R_1^2 R_2^2 w C - R_1^2 w^3 L^2 C + R_2^2 w L + R_1^2 R_2^2 w^3 C^2 L}{(R_2^2 + w^2 L^2)(R_1 - j R_1^2 w C) + (1 + R_1^2 w^2 C^2)(R_2 w^2 L^2 + j R_2^2 w L)} \right]$$

Con estos datos:

$$\mathbf{i} = \mathbf{v} / \mathbf{Z} \Rightarrow I_0 = V_0 / |\mathbf{Z}| = \sqrt{2} V_{ef} / |\mathbf{Z}|$$

$$\varphi = -\varphi_z$$

$$\therefore \boxed{i(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}|^{-1} \cdot \cos(wt + \varphi)}$$

$$\mathbf{v}_{R1} = \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{Z}_1$$

$$V_{01} = V_{0C} = V_{0R1} = I_0 \cdot |\mathbf{Z}_1| = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}_1| / |\mathbf{Z}|$$

$$\text{Arg } \mathbf{v}_1 = \text{Arg } \mathbf{i} + \text{Arg } \mathbf{Z}_1 = \varphi + \varphi_{z1}$$

$$\boxed{v_c(t) = v_{R1}(t) = v_1(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}_1| / |\mathbf{Z}| \cdot \cos(wt + \varphi + \varphi_{z1})}$$

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{v}_c / \mathbf{Z}_C$$

$$I_{0C} = V_{0C} / |\mathbf{Z}_C| = \sqrt{2} V_{ef} \cdot wC \cdot |\mathbf{Z}_1| / |\mathbf{Z}|$$

$$\text{Arg } \mathbf{i}_c = \text{Arg } \mathbf{v}_c - \text{Arg } \mathbf{Z}_C = \varphi + \varphi_{z1} - (-\pi/2) = \varphi + \varphi_{z1} + \pi/2$$

$$\boxed{i_c(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot wC \cdot |\mathbf{Z}_1| / |\mathbf{Z}| \cdot \cos(wt + \varphi + \varphi_{z1} + \pi/2)}$$

$$\mathbf{i}_{R1} = \mathbf{v}_{R1} / \mathbf{Z}_{R1} = \mathbf{v}_{R1} / R_1$$

$$\boxed{i_{R1}(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}_1| / (|\mathbf{Z}| \cdot R_1) \cdot \cos(wt + \varphi + \varphi_{z1})}$$

$$\mathbf{v}_{R2} = \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{Z}_2$$

$$V_{02} = V_{0L} = V_{0R2} = I_0 \cdot |\mathbf{Z}_2| = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}_2| / |\mathbf{Z}|$$

$$\text{Arg } \mathbf{v}_2 = \text{Arg } \mathbf{i} + \text{Arg } \mathbf{Z}_2 = \varphi + \varphi_{z2}$$

$$\boxed{v_L(t) = v_{R2}(t) = v_2(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |\mathbf{Z}_2| / |\mathbf{Z}| \cdot \cos(wt + \varphi + \varphi_{z2})}$$

$$i_L = v_L / Z_L$$

$$I_{OL} = V_{OL} / |Z_L| = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |Z_2| / (|Z| \cdot wL)$$

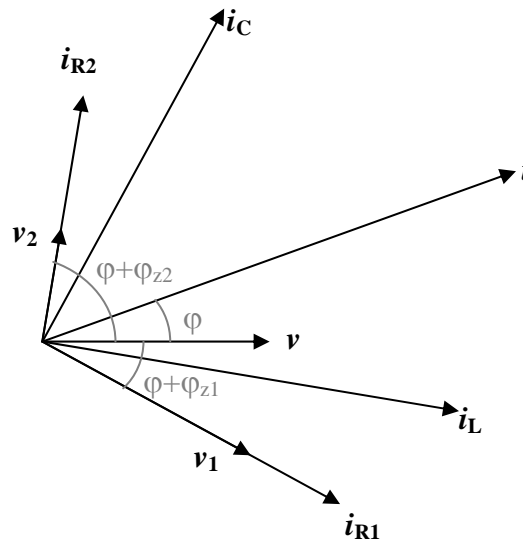
$$\text{Arg } i_L = \text{Arg } v_L - \text{Arg } Z_L = \varphi + \varphi_{z2} - \pi/2$$

$$i_L(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |Z_1| / (|Z| \cdot wL) \cdot \cos(\omega t + \varphi + \varphi_{z2} - \pi/2)$$

$$i_{R2} = v_{R2} / Z_{R2} = v_{R2} / R_2$$

$$i_{R2}(t) = \sqrt{2} V_{ef} \cdot |Z_2| / (|Z| \cdot R_2) \cdot \cos(\omega t + \varphi + \varphi_{z2})$$

Diagrama fasorial



Observar que:

- El conjunto entero gira en el tiempo a velocidad constante y se mantienen las relaciones de ángulos. El instante representado es $t = 0$.
- $v_1 + v_2 = v$
- $i_C + i_{R1} = i$
- $i_L + i_{R2} = i$
- i_{R1} en fase con v_1 e i_{R2} en fase con v_2
- i_C adelanta 90° a $v_c (= v_1)$
- i_L retrasa 90° con respecto a $v_L (= v_2)$